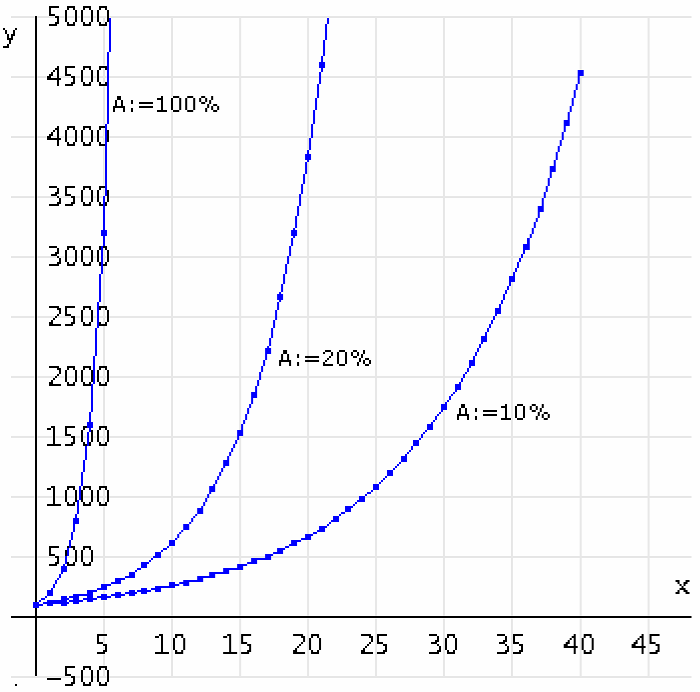
Sistemi dinamici - Attività 1

Crescita esponenziale

Paolo Lazzarini - p.lazzarini@tin.it

Consideriamo una popolazione di conigli distribuita su un certo territorio; per il momento i nostri conigli sono liberi di crescere e di moltiplicarsi senza minacce e senza limiti (non ci sono predatori e il cibo è abbondante). Qual è il modello matematico che rappresenta questa situazione?

Supponiamo che il numero *c* di conigli si incrementi in ogni unità di tempo (ad esempio in ogni mese) di una percentuale pari ad A=10%. Sia $c_0=100$ il numero iniziale dei conigli. E' facile determinare un modello discreto per l'evoluzione del sistema; si ha, indicando con c_1 il numero di conigli dopo un mese, con c_2 dopo due mesi e così via,



$c_0=100$

$c_1= c_0 + 0{,}1c_0 = 1{,}1c_0$

$c_2= c_1 + 0{,}1c_1 = 1{,}1c_1 = 1{,}1^2c_0$

$c_3= c_2 + 0{,}1c_2 = 1{,}1c_2 = 1{,}1^3c_0$

…………………………..

$c_n = c_{n-1} + 0.1c_{n-1} = c_0 1{,}1^n$

Il modello di crescita è quindi la crescita *esponenziale* cioè del tipo $c(n)=c_0k^n$ (nel nostro caso k=1,1). Scriviamo un programma con Derive per la crescita esponenziale ottenuta per passi successivi (iterativamente)

```
#1:   A := 0.1

#2:   c0 := 100

      conigli(n, c, cont) :=
        Prog
          c := c0
          cont := 0
#3:       Loop
            If cont = n
               RETURN c
            c := c + A·c
            cont := cont + 1

#4:   TABLE(conigli(n), n, 0, 10)
```

#5:

0	100
1	110
2	121
3	133.1
4	146.41
5	161.051
6	177.1561
7	194.87171
8	214.3588810
9	235.7947691
10	259.3742460

La stessa tabella l'avresti ottenuta ovviamente utilizzando per la successione c(n) l'espressione *chiusa* $c(n)=c_0 1{,}1^n$ (con questa espressione puoi calcolare il termine n-esimo della successione senza dover calcolare tutti i termini precedenti come avviene nel processo iterativo).

#6: TABLE$(c0\cdot 1.1^n$, n, 0, 10)

#7:

0	100
1	110
2	121
3	133.1
4	146.41
5	161.051
6	177.1561
7	194.8717100
8	214.3588810
9	235.7947690
10	259.3742460

Se provi a calcolare le differenze finite (prime, seconde, ecc.) per la successione c(n) ti accorgerai che non diventano mai costanti; ciò non ci meraviglia perché la formula che esprime il termine n-esimo non è di tipo **polinomiale** ma **esponenziale**. Qui invece è interessante osservare che è costante, per ogni n, il rapporto tra il termine (n+1)-esimo e il termine n-esimo

#8: $c(n) := c0\cdot 1.1^n$

#9: $$\frac{c(n+1)}{c(n)}$$

#10: 1.1

Come ricorderai il motore di una successione **lineare** è

$$a_{n+1} = a_n + k$$

Ora ti rendi con che il motore di una successione **esponenziale** è

$$c_{n+1} = kc_n$$

In conclusione: abbiamo determinato un modello evolutivo per il *sistema dinamico* costituito da una popolazione di conigli. Il modello esponenziale conduce però ad una crescita del numero dei conigli che diviene via via più rapida (osserva i grafici precedenti) e **non è compatibile** con un sistema biologico reale. Una crescita esponenziale trova ben presto dei limiti di sviluppo dovuti alla mancanza di cibo o di spazio. Solo in una fase iniziale un sistema biologico può evolversi secondo un modello esponenziale. Dobbiamo quindi trovare dei modelli matematici che tengano conto di risorse limitate e dell'interazione di più specie in competizione.

Tieni presente infine che la nozione di *sistema dinamico* è molto generale e coinvolge tutti i rami della scienza; un sistema dinamico è un qualsiasi processo in movimento. Sono sistemi dinamici, ad esempio, un insieme di corpi in movimento tra loro interagenti, le variazioni dei titoli azionari, le condizioni meteorologiche, il moto di un pendolo, l'evoluzione di una popolazione e così via. Nei sistemi dinamici *discreti* (quelli di cui ci stiamo occupando) uno stato del sistema è determinato dallo stato precedente e la sua evoluzione è quindi riconducibile ad un processo iterativo.